Las Bondades del Filtro de Kalman

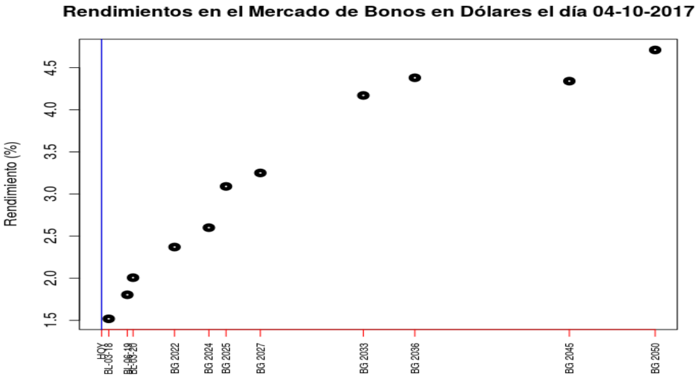
ANDRÉS SOSA

IV JORNADAS DE ESTADÍSTICA APLICADA

CENTRO CULTURAL DE LA PALOMA
LA PALOMA - ROCHA

28 DE OCTUBRE DE 2017

Problema en el mercado de tasas de interés que enfrentamos



Me interesa **obtener la tasa de rendimiento a muy corto plazo** y_0, vía los datos observados en el mercado Z_{T_i}, via el modelo

$$Z_{T_i} = \psi(T_i, y_o) + \nu_{T_i}. \tag{1}$$

Agregando dinámica al problema

Al analizar los resultados obtenidos al realizar el procedimiento de Mínimos cuadrados (o cualquier otro proceso) los resultados obtenidos en un día no tienen relación con los resultados en días posteriores.

Por eso, el objetivo es agregar dinámica estocástica a la tasa de rendimiento de corto plazo con el fin de observar la evolución de las tasas de interés de manera conjunta. Manteniendo la relación que cumplen las tasas de rendimiento establecida anteriormente.

Es decir, establecer un sistema de espacio-estado (continuo/discreto) dado

$$\begin{aligned} dy_t &= \mu(t, y_t, \theta)dt + \sigma(t, y_t, \theta)dW_t \\ Z_{t_i} &= \psi(t_i, y_{t_i}, \theta) + \nu_i. \end{aligned} \tag{2}$$

Modelo Espacio Estado (versión estándar)

Estos sistemas, se representan mediante la forma de espacio-estado donde las ecuaciones pueden ser resumidas en

$$y_t = \alpha(\theta) + \phi(\theta) y_{t-1} + \mu_t; \tag{3}$$

$$z_t = A_t(\theta) + B_t(\theta) y_t + \nu_t; \tag{4}$$

donde $y_t \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $\mu_t \in \mathbb{R}^N$, $z_t \in \mathbb{R}^n$, $\nu_t \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathbb{M}^{NxN}$ y $B_t \in \mathbb{M}^{nxN}$

La especificación del modelo espacio-estado es completo con los siguientes dos supuestos. El primero en cuanto al vector inicial y_0 que tiene distribución normal de parámetros $E(y_0) = y_{0|0}$ y $Var(y_0) = P_{0|0}$. La segunda es que los errores ν_t y μ_t están incorrelacionados entre ellos en todos los tiempos e incorrelacionados al vector de estados inicial. Es decir

$$E(\nu_t \mu_s^{'}) = 0 \quad \forall\, s, t = 1, \ldots, T.$$

$$E(\nu_t y_0^{'}) = 0 \quad \text{y} \quad E(\mu_t y_0^{'}) = 0.$$

Filtro de Kalman

El problema básico que intenta solucionar el Filtro de Kalman es estimar los factores no observados en un sistema lineal donde sólo se conoce la salida del sistema.

El Filtro de Kalman es el estimador óptimo para una gran cantidad de problemas y muy útil y efectivo para estimar modelos de espacio-estado.

El filtro es esencialmente un **conjunto de ecuaciones** que implementan un **sistema predictor-corrector** para las estimaciones con el fin de ser actualizadas al arribo de nueva información al modelo.

Las aplicaciones de esta metodología se dan en muchos campos de la ciencias. Existen trabajos aplicados en física (navegación), ingeniería (robótica), medicina (instrumentación), biología humana (habla humana), metereología (predicción de temperaturas), economía (modelos estructurales).

Ecuaciones del Filtro de Kalman

Si utilizamos la ecuación de transición, conocemos que y_t se puede expresar como suma de dos vectores aleatorios con distribución normal, por lo cual y_t también es un vector normal de media

$$y_{t|t-1} = \alpha + \phi y_{t-1|t-1} \tag{5}$$

y matriz de covarianza del error

$$P_{t|t-1} = \phi P_{t-1|t-1} \phi^{'} + Q \tag{6}$$

Con el fin de adecuar las estimaciones de y_t realizadas en (5) y (6) al arribo de nueva información observable z_t en tiempo t. Se aplica la propiedad anterior

$$y_{t|t} = y_{t|t-1} + K_t(z_t - A_t - B_t y_{t|t-1}) \tag{7}$$

$$P_{t|t} = (Id - K_t B_t) P_{t|t-1} \tag{8}$$

donde la matriz K_t es denominada la Ganancia de Kalman y cumple la ecuación

$$K_t = P_{t|t-1} B_t^{'} \underbrace{(B_t P_{t|t-1} B_t^{'} + R)}_{H_t}{}^{-1} \tag{9}$$

Función de Verosimilitud del Filtro de Kalman

El sistema está asumiendo que la media condicional de la variable aleatoria z_t sujeto a la información en tiempo $t-1$ es

$$z_{t|t-1} = A_t + B_t y_{t|t-1}$$

En el modelo propuesto se observa que $\zeta_t = z_{t_i} - z_{t|t-1}$ es un vector normal de media 0 y matriz de covarianza $H_t = B_t P_{t|t-1} B_t^{'} + R$.

Por lo cual resulta que la función de verosimilitud para encontrar los parámetros θ es dada por la ecuación

$$\log L(z,\theta) = \sum_{t=1}^{T} \log(z_{t_i}|\mathcal{F}_{t_{i-1}}) =$$

$$-\frac{nT}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log|H_{t_i}| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\zeta_t^{'} H_{t_i}^{-1}\zeta_{t_i}$$

Aplicaciones al mercado uruguayo

El modelo utilizado en el trabajo, es el modelo de Vasicek en N dimensiones.
La ecuación de transición es obtenida discretizando la dinámica de la EDE de Ornstein-Uhlenbeck

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{t_i}^1 \\ y_{t_i}^2 \\ \vdots \\ y_{t_i}^N \end{pmatrix}}_{y_{t_i}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1(1-e^{-a_1\Delta_t}) \\ b_2(1-e^{-a_2\Delta_t}) \\ \vdots \\ b_N(1-e^{-a_N\Delta_t}) \end{pmatrix}}_{\alpha} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-a_1\Delta_t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-a_2\Delta_t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-a_N\Delta_t} \end{pmatrix}}_{\phi} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{t_{i-1}}^1 \\ y_{t_{i-1}}^2 \\ \vdots \\ y_{t_{i-1}}^N \end{pmatrix}}_{y_{t_{i-1}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_{t_i}^1 \\ \mu_{t_i}^2 \\ \vdots \\ \mu_{t_i}^N \end{pmatrix}}_{\mu_{t_i}} \tag{10}$$

donde $\mu_{t_i}|F_{t_{i-1}} \approx N(0,Q)$ y

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2a_1}(1-e^{-2a_1\Delta_t}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{2a_2}(1-e^{-2a_2\Delta_t}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_N^2}{2a_N}(1-e^{-2a_N\Delta_t}) \end{pmatrix}$$

donde la matriz Q está asumiendo que los N factores son independientes.

Modelo Espacio Estado (2)

En el modelo seleccionado la **la ecuación de medida** se expresa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z(\tau_{t_i}^1) \\ z(\tau_{t_i}^2) \\ \vdots \\ z(\tau_{t_i}^n) \end{pmatrix}}_{z_{t_i}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-A(\tau_{t_i}^1)}{\tau_{t_i}^1} \\ \frac{-A(\tau_{t_i}^2)}{\tau_{t_i}^2} \vdots \\ \frac{-A(\tau_{t_i}^n)}{\tau_{t_i}^n} \end{pmatrix}}_{A_{t_i}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{B_1(\tau_{t_i}^1)}{\tau_{t_i}^1} & \frac{B_2(\tau_{t_i}^1)}{\tau_{t_i}^1} & \cdots & \frac{B_N(\tau_{t_i}^1)}{\tau_{t_i}^1} \\ \frac{B_1(\tau_{t_i}^2)}{\tau_{t_i}^2} & \frac{B_2(\tau_{t_i}^2)}{\tau_{t_i}^2} & \cdots & \frac{B_N(\tau_{t_i}^2)}{\tau_{t_i}^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{B_1(\tau_{t_i}^n)}{\tau_{t_i}^n} & \frac{B_2(\tau_{t_i}^n)}{\tau_{t_i}^n} & \cdots & \frac{B_N(\tau_{t_i}^n)}{\tau_{t_i}^n} \end{pmatrix}}_{B_{t_i}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{t_i}^1 \\ y_{t_i}^2 \\ \vdots \\ y_{t_i}^N \end{pmatrix}}_{B_{t_i}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_{t_i}^1 \\ \nu_{t_i}^2 \\ \vdots \\ \nu_{t_i}^n \end{pmatrix}}_{nu_{t_i}} \qquad (11)$$

$$B_i(\tau) = \frac{1}{a_i}(1 - e^{-a_i \tau}); \qquad A(\tau) = \sum_{i=1}^{i=N} (b_i - \frac{\sigma_i^2}{2a})(B_i(\tau) - \tau) - \frac{\sigma_{ii}^2 B_i^2(\tau)}{4a_i}$$

donde $\nu_{t_i} \approx N(0, R)$ y

$$R = \begin{pmatrix} \epsilon_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_N^2 \end{pmatrix}$$

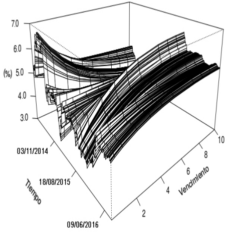
Aplicaciones al Mercado Uruguayo

La deuda soberana emitida en Uruguay está denominada principalmente en tres monedas. Presentamos los resultados para Unidades Indexadas. Las bases de datos son de carácter diario y abarcan el

UNIDADES INDEXADAS

- N.T. 2017
- N.T. 2019
- N.T. 2020
- Bono Local 2018
- Bono Local 2020
- Bono Global 2018
- Bono Global 2028

	UN FACTOR	DOS FACTORES
a_1	0.683704	0.478106
a_2	-	0.035019
b_1	0.055365	0.043008
b_2	-	0.018637
σ_1	0.016890	0.015759
σ_2	-	0.002805
ϵ_1	0.006503	0.006441
ϵ_2	0.002315	0.002132
ϵ_3	0.001444	0.000343
ϵ_4	0.002301	0.001550
ϵ_5	0.001794	0.001551
ϵ_6	0.000903	0.000668
ϵ_7	0.003155	0.000697



MUCHAS GRACIAS