Sistemas Binarios Estocásticos

Héctor Cancela, Gustavo Guerberoff, Franco Robledo,
Pablo Romero

IV Jornadas de Estadística

La Paloma, 2017

Definición

Un Sistema Binario Estocástico (SBS) es una terna $\mathcal{S} = (S, \phi, p)$:

- $S = \{1, \ldots, m\}$ son *componentes*,
- $\phi : \mathcal{P}(S) \to \{0, 1\}$ es su *estructura*, y
- $p = (p_1, \ldots, p_m)$ la confiabilidad de sus componentes.

Si $X = (X_1, \ldots, X_m)$ es un vector aleatorio a coordenadas independientes $X_i \sim Ber(p_i)$, la *confiabilidad* del SBS es:

$$R_{\mathcal{S}} = P(\phi(X) = 1) = E(\phi(X)).$$

Polinomio Confiabilidad

Si el sistema es homogéneo ($p_i = p$), la confiabilidad se puede expresar mediante el *polinomio confiabilidad*:

$$R_{\mathcal{S}}(p) = \sum_{i=0}^{m} F_i p^{m-i}(1-p)^i.$$

Deseamos hallar el polinomio $R_{\mathcal{S}}(p)$ para cualquier sistema binario estocástico homogéneo.

Interpolación con Monte Carlo

Dado un conjunto de abscisas $T = \{p_1, \ldots, p_m\}$ y valores funcionales $y_1, \ldots, y_m$, existe un único polinomio interpolante de grado m o menos.
Para cada abscisa p_i, tomamos una muestra i.i.d. de vectores aleatorios $X_1, \ldots, X_N \sim X$, y estimamos

$$\overline{\Phi_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \phi(X_i) \sim R_{\mathcal{S}}(p_i)$$

El estimador $\overline{\Phi_N}$ es insesgado para $R_{\mathcal{S}}(p_i)$. Un IdeC de nivel α para $R_{\mathcal{S}}(p_i)$ centrado en $\overline{\Phi_n}$ tiene radio aprox. igual a:

$$\delta = \frac{\sqrt{\overline{\Phi_N}(1 - \overline{\Phi_N})} z_{\alpha/2}}{\sqrt{N}}$$

siendo $P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$, con Z normal estándar.

Error de Interpolación

Consideremos el operador lineal $X_T : C[a,b] \to C[a,b]$ definido por:

$$X_T(f) = \sum_{i=0}^{m} f(p_i) l_i(x)$$

Su norma operador es el número de Lebesgue $\Delta_T = \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{m} |l_i(x)|$, que depende del conjunto T.
Observemos que la norma infinito del error se puede acotar:

$$\|X_T(R - \hat{R})\| \leq \max_i \{|R(p_i) - \hat{R}(p_i)|\} \Delta_T$$

Conclusiones

1. El cálculo de la confiabilidad en SBS es un problema duro.
2. La estadística puntual permite nociones de aproximación (de mínimo error).
3. Se debe lidiar con el Problema Central de Eventos Raros.
4. El problema es sensible a la selección de abscisas de interpolación.

Problemas Abiertos

1. ¿Se puede realizar todo SBS mediante un grafo?
2. Dado un SBS arbitrario: ¿cómo definir un SBS más próximo superior e inferior?
3. ¿Cómo se puede representar todo SBS mediante BDD (Binary Decision Diagram)?
4. ¿Cómo extender el concepto de red uniformemente confiable a todo SBS?
5. Proponer métodos basados en cotas para la confiabilidad de SBS.